التمرين الأول: (05 نقاط)

1) برهن أن الدوران r ذو الزاوية α و المركز Ω ذو اللاحقة ω هو التحويل النقطي في المستوي المركب الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z'-\omega=e^{i\alpha}(z-\omega)$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$، الوحدة البيانية $1cm$

نعتبر التحويل النقطي T في هذا المستوي والذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z'=iz+4+4i$$

أ. عين اللاحقة ω للنقطة Ω حيث $T(\Omega)=\Omega$.

ب. بين أنه من أجل كل عدد مركب z لدينا: $z'-4i=i(z-4i)$

ج. استنتج طبيعة التحويل T وعناصره المميّزة.

3) A وَ B نقطتان لاحقتاهما: $z_A=4-2i$ وَ $z_B=-4+6i$

أ. عين لاحقتي النقطتين A' وَ B' صورتي A وَ B على الترتيب بالتحويل T .

ب. علم النقط A' ، B' ، A ، B وَ Ω في المستوي المركب.

4) نسمي p ، m، n وَ q لواحق النقط P ، M، N وَ Q على الترتيب منتصفات للقطع المستقيمة: $[A'B]$،$[BB']$ $[AA']$ وَ $[B'A]$ على الترتيب.

أ. أحسب p ، m، n وَ q ثم علم النقط P ، M، N وَ Q في نفس المعلم السابق.

ب. برهن أن المستقيمين (AB') وَ (ΩN) متعامدان.

ج. بين أن: $\dfrac{q-m}{n-m}=i$ وَ $\dfrac{q-p}{m-n}=1$ ثم استنتج طبيعة الرباعي $MNPQ$.

التمرين الثاني: (4,5 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

1. نعتبر المستوي (P) الذي يشمل النقطة $B(-2;1;1)$ والشعاع $\vec{n}(2;1;-5)$ ناظم له، والمستوي (P') ذو المعادلة: $2x+y+z-10=0$

أ. برهن أن المستويين (P) وَ (P') متعامدان.

ب. برهن أن المستويين (P) وَ (P') متقاطعان وفق المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $C(3;1;3)$ وَ الموجّه بالشعاع $\vec{u}(-1;2;0)$

ج. احسب المسافة بين النقطة $A(3;1;2)$ والمستقيم (Δ).

2. نعتبر من أجل كل عدد حقيقي t النقطة $M(3-t;1+2t;3)$ من الفضاء .

أ. عبر عن المسافة AM بدلالة t.

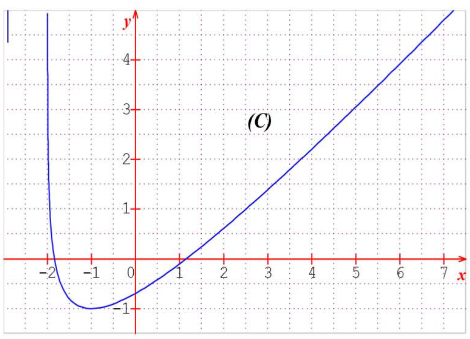
ب. h الدالة العددية للمتغير الحقيقي t معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(t)=AM$

أدرس اتجاه تغير الدالة h واستنتج من جديد المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ).

لتمرين الثالث: (4,5نقاط)

g الدالة العددية المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x-\ln(x+2)$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ الشكل المقابل...



1) أحسب $g(-1)$ ، وبقراءة بيانية ، حدد اتجاه تغير الدالة g .

2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 3$ وَ $u_{n+1} = g(u_n)$

3) أعد رسم المنحني (C) على ورقتك المليمترية وضع على حامل محور الفواصل الحدود:، u_0 ، u_1، u_2 وَ u_3 (لا يطلب حساب الحدود)

4) برهن بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq -1$

5) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة.

6) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها.

7) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: المعرّفة بـ $v_0 = 0$ ومن اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،

$$v_n = \ln(u_0+2)(u_1+2)...(u_{n-1}+2)$$

أ. أثبت أنه من أجل عدد طبيعي n : $v_n = 3 - u_n$

ب. أستنتج: $\lim_{n}(u_0+2)(u_1+2)..(u_{n-1}+2)$

لتمرين الرابع: (06نقاط)

I. لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بالدستور: $f(x) = \ln x - \frac{1}{\ln x}$ نسمي (C_f) المنحنى الممثّل للدالة f وَ (Γ) المنحنى الذي معادلتة $y = \ln x$ في المستوي المزود بمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. أدرس ووضح النهايات للدالة f عند 1 وعند $+\infty$.

2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x > 1$ لدينا: $f'(x) = \frac{1+(\ln x)^2}{x(\ln x)^2}$

3. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم أنشئ جدول تغيراتها.

4. أحسب $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - \ln x]$ ، قدم تفسيرا هندسيا للنتيجة.

5. وضح الوضعية النسبية للمنحنيين (C_f) وَ (Γ) .

II. نريد البحث عن المماسات للمنحنى (C_f) المارة بالمبدأ O ، ليكن a عدد حقيقي من المجال $]1;+\infty[$.

1. برهن أن المماس T_a للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة a يمر بمبدأ الإحداثيات إذا و فقط إذا كان $f(a) - af'(a) = 0$

لتكن g الدالة المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بالدستور: $g(x) = f(x) - xf'(x)$

2. برهن أنه على المجال $]1;+\infty[$ المعادلتين $g(x) = 0$ و $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$ لهما نفس الحلول.

3. لتكن الدالة u ذات المتغير الحقيقي t والمعرفة على $\mathbb{R}$ بالدستور: $u(t) = t^3 - t^2 - t - 1$

أ. ادرس تغيرات الدالة u وأنشئ جدول تغيراتها.

ب. بين أن الدالة u تنعدم مرة واحدة فقط على $\mathbb{R}$.

ج. استنتج وجود مماس وحيد للمنحنى (C_f) يمر بالمبدأ O .

د. أثبت أن الحل الوحيد α للمعادلة $u(x) = 0$ يحقق: $1,83 < \alpha < 1,84$.

هـ. استنتج أن معادلة المماس (T_{e^α}) المار من المبدأ O هي $y = \left(\frac{1+\alpha^2}{e^\alpha \alpha^2}\right)$.

III. الإنشاء والدراسة البيانية

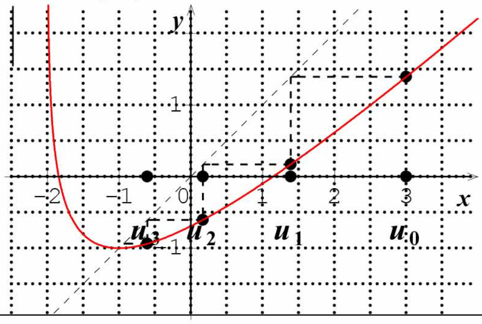
1. أنشئ هـ المماس (T_{e^α}) والمنحنيين (Γ) وَ (C_f)، يعطى ما يلي: $\alpha \approx 1,8$ وَ $e^\alpha \approx 6,26$

2. نعتبر عدد حقيقي m ، من قراءة بيانية أدرس حسب قيم العدد الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة $f(x) = mx$ التي تنتمي إلى المجال $]1;10[$.

عناصر الإجابة	العلامة: مجزأة	العلامة: مجموع
التمرين الأول: 05 نقاط		05نقاط
1) $r(M)=M'$ وَ $M\neq\Omega$ معناه $\begin{cases}\Omega M=\Omega M'\\ (\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'})\end{cases}$ أي $\begin{cases}\left\|\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right\|=1\\ \arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right)=\alpha\end{cases}$ أي $\frac{z'-\omega}{z-\omega}=e^{i\alpha}$.	0.75	
2) أ) لدينا $\omega=i\omega+4+4i$ أي $\omega=4i$. ب) إثبات أن $z'-4i=i(z-4i)$. جـ) طبيعة T : T دوران مركزه النقطة $\Omega(4i)$ والزاوية $\alpha=\frac{\pi}{2}$.	3×0.25	
3) أ) $z_{A'}=6+8i$ وَ $z_{B'}=-2$. ب) تعليم النقط.	2×0.25 0.75	
4) أ) منتصفات القطع: $m=5+3i$ ، $n=1+7i$ ، $p=-3+3i$ وَ $q=1-i$. ب) إثبات أن $(B'A)$ يعامد (ΩN) ، لدينا: $\frac{z_A-z_{B'}}{n-\omega}=-2i$ إذن $-\frac{\pi}{2}$ قيسا للزاوية $(\overrightarrow{\Omega N};\overrightarrow{B'A})$. ج) إثبات أن $\frac{q-m}{n-m}=i$ وأن $\frac{q-p}{m-n}=1$ ، ينتج $(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{MQ})=\frac{\pi}{2}$ وَ $MN=MQ$ وَأن $(PQ)//(MN)$ وَ $MN=PQ$ ينتج أن الرباعي $MNPQ$ مربع.	4×0.25 0.5 0.75	
التمرين الثاني: 4.5 نقطة		4.5
1) أ) المستوي (P) يعامد (P') لأن $\vec{n}.\vec{n'}=0$ حيث $\vec{n}(2;1;1)$. ب) بما أن (P) يعامد (P') فإن المستويين متقاطعان وفق مستقيم، وبما أن $C\in(P)\cap(P')$ وأن $\vec{n}.\vec{u}=0$ و $\vec{u}.\vec{n'}=0$ فإن (Δ) مستقيم التقاطع. جـ) المسافة: $d(A;(\Delta))=\sqrt{d^2(A;(P))+d^2(A;(P'))}=1$ $u.l$.	0.75 01 0.5	
2) $AM=\sqrt{5t^2+1}$. ب) بما أن $h'(t)=\frac{5t}{\sqrt{5t^2+1}}$ فإن الدالة h متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ ومناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ النقطة M تمسح المستقيم (Δ) ،إذن المسافة $d(A;(\Delta))=h(0)=1$ $u.l$.	0.5 1 0.75	
التمرين الثالث: 4.5 نقطة		
1) $(-1)=-1$ ، الدالة g متناقصة تماما على $]-2;-1]$ ومتزايدة تماما على $[-1;+\infty[$.		4.5 نقاط

Nafouz

2) تمثيل الحدود الاربعة الاولى على محور الفواصل. — 01



3) نبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n \geq -1$. — 01

بداية التراجع: من أجل $n = 0$ لدينا: $u_0 = 3 \geq -1$ الخاصية محققة.

فرضية التراجع: نفرض أن $u_n \geq -1$ محققة إلى غاية الرتبة n

برهان التراجع: نبين أن $u_{n+1} \geq -1$.

لدينا من الفرضية $u_n \geq -1$ وبما أن g متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$ فإن $g(u_n) \geq -1$ أي $u_{n+1} \geq -1$.

4) إثبات أن المتتالية (u_n) متناقصة: من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = -\ln(u_n + 2) \geq 0$ لأن $u_n \geq -1$. — 0.5

5) المتتالية (u_n) متقاربة كونها متناقصة ومحدودة من الأسفل $(u_n \geq -1)$ — 0.75

النهاية: $\lim u_n = l$ ومنه $\ln(l+2) = 0$ أي $l = -1$ ومنه $\lim u_n = -1$

6) أ) إثبات أن $v_n = 3 - u_n$: — 0.75

لدينا من أجل كل عدد طبيعي $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n + 2)$ أي $\ln(u_n + 2) = u_n - u_{n+1}$ ومنه

$v_n = (u_0 - u_1) + (u_1 - u_2) + \cdots + (u_{n-1} - u_n) = u_0 - u_n = 3 - u_n$

ب) استنتاج النهاية: لدينا $\lim_{n\to+\infty}\left((u_0+2)(u_1+2)\ldots(u_{n-1}+2)\right) = \lim(e^{v_n}) = e^4$. — 0.5

التمرين الرابع: 06 نقاط

6 نقاط

I) 1) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{\substack{x\to 1 \\ >}} f(x) = -\infty$. مع التوضيح — 2×0.25

2) حساب المشتقة: $f'(x) = \frac{(\ln x)^2+1}{x(\ln x)^2}$ بعد تحديد مجموعة قابلية الاشتقاق — 0.25

3) الدالة f متزايدة تماما على $]1;+\infty[$، — 0.25

جدول تغيراتها في المقابل. — 0.25

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

4) $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - \ln x) = 0$ منه المنحنيين (C) و(Γ) متقاربان بجوار $+\infty$. — 2×0.25

5) وضعية المنحنيين (C) و(Γ): $f(x) - \ln x = -\frac{1}{\ln x} < 0$ منه (C) فوق(Γ) على $]1;+\infty[$. — 0.25

II) 1) إثبات أن المماس (T_a) للمنحنى (C) يمر من المبدأ معناه $f(a) - af'(a) = 0$. — 0.25

2) إثبات أن للمعادلتين $g(x) = 0$ و $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$ نفس الحلول. — 0.25

3) أ) تغيرات الدالة u: $\lim_{t\to+\infty}(t) = +\infty$ ، $\lim_{t\to-\infty} u(t) = -\infty$. — 2×0.25

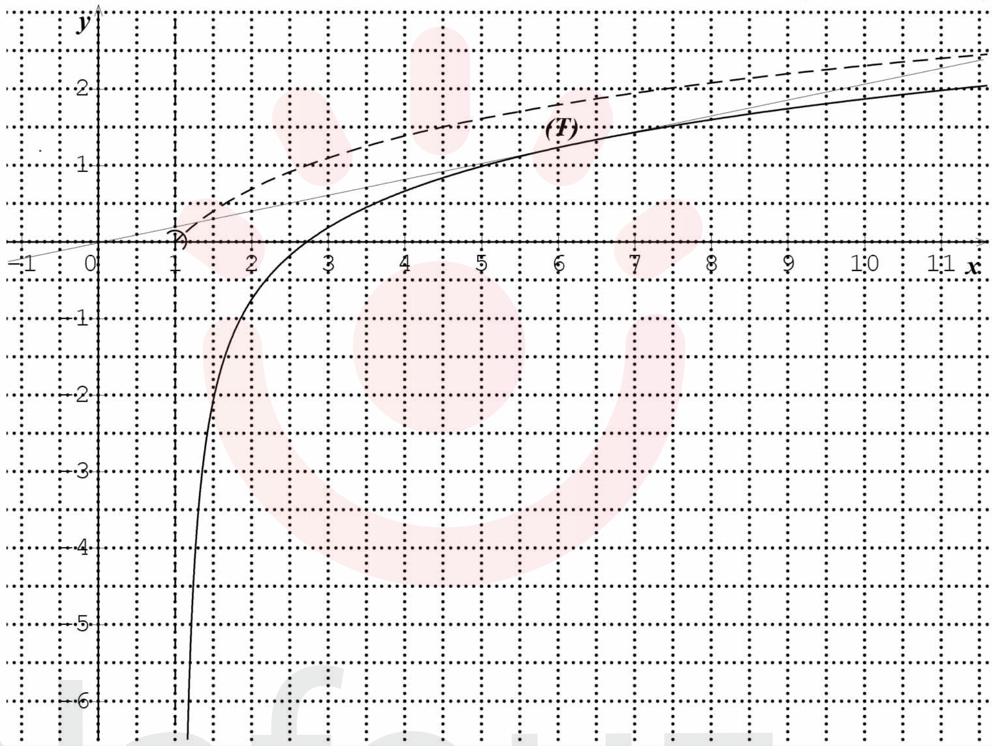
لدينا $u'(t) = 3t^2 - 2t - 1 = (3t+1)(t-1)$ إذن u مناقصة تماما على المجال $\left[-\frac{1}{3};1\right]$ — 2×0.25

ومتزايدة تماما على المجالين $\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right]$ و $[1;+\infty[$.

جدول التغيرات: — 0.25

t	$-\infty$		$\frac{-1}{3}$		1		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$u(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{-22}{27}$	↘	-2	↗	$+\infty$

ب) إثبات ان الدالة u تنعدم عند قيمة واحدة فقط. بتطبيق مبرهنة القيم المتوسطة على المجال — 0.25

$]1;+\infty[$ وهي سالبة تماما على المجال $]-\infty;1]$. ج) بما المعادلة $u(t)=0$ تقبل حلا وحيدا على $\mathbb{R}$ أي المعادلة $f(x)-xf'(x)=0$ تقبل حلا وحيدا إذن يوجد مماس واحد لـ (C) يمر من المبدأ O.	0.25	
د) المعادلة $u(t)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$ وبما أن $u(1.83)\times u(1.84)\cong -1.968\times10^{-4}$ فإن $1.83<\alpha<1.84$.	0.25	
هـ) بما أن حل المعادلة $\mathrm{u(t)}=0$ هو α فإن حل المعادلة $g(x)=0$ هو $x=e^{\alpha}$ ومنه معادلة المماس $(T_{e^{\alpha}})$ المار من المبدأ من الشكل $y=\left(\frac{1+\alpha^2}{\alpha^2 e^{\alpha}}\right)x$.	0.25	
III) 1) إنشاء المستقيم $(T\ _{\alpha})$ والمنحنيين (C) و (Γ):  	1	
2) حلول العادلة $f(x)=mx$ على المجال $]1;10[$ بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم ذو المعادلة $y=mx$، نميز الحالات الآتية: * إذا كان $m\in\left]-\infty;\frac{f(10)}{10}\right]$ المعادلة $f(x)=mx$ تقبل حلا واحدا على المجال $]1;10[$. * إذا كان $m\in\left]\frac{f(10)}{10};\frac{1+\alpha^2}{\alpha^2e^{\alpha}}\right[$ المعادلة $f(x)=mx$ تقبل حلين متمايزين على المجال $]1;10[$. * إذا كان $m=\frac{1+\alpha^2}{\alpha^2e^{\alpha}}$ المعادلة $f(x)=mx$ تقبل حلا مضاعفا على المجال $]1;10[$ هو e^{α}. * إذا كان $m\in\left]\frac{1+\alpha^2}{\alpha^2e^{\alpha}};+\infty\right[$ المعادلة $f(x)=mx$ لا تقبل حلولا على المجال $]1;10[$.	0.25	